Труды Петрозаводского государственного университета
Серия *"Прикладная математика и информатика"* Выпуск 6, 1997

УДК 519.7, 511.512, 512.644

Общий вид решений системы линейных диофантовых уравнений, ассоциированной с контекстно-свободной грамматикой

Ю. А. Богоявленский, Д. Ж. Корзун

В работе продолжены исследования, начатые M. Filgueiras и A. Tomás [1] и заключающиеся в использовании теории формальных языков для изучения систем линейных диофантовых уравнений. Получен общий вид решений такой системы, ассоциированной с некоторой КС-грамматикой, на основе чего предлагается алгоритм ее решения, исследованы вопросы разрешимости подобных систем, включая критерии разрешимости, условия существования конечного или бесконечного числа решений и проверка на совместность.

§1. Введение

Разработка методов решения диофантовых уравнений восходит еще к античности [2]. Изначально решение искалось среди натуральных чисел, но позднее к этим задачам стали относить задачи поиска на более широких множествах — целых или рациональных чисел [3, 4, 5]. Последние множества являются кольцами, и это упрощает проблему. В этом случае система линейных уравнений допускает использование алгоритма Гаусса [6] или подобных ему методов [7, 8]. Однако многие практические задачи [7, 9, 10] требуют неотрицательности искомых решений. Далее мы будем рассматривать решения диофантовых уравнений только на множестве $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Сужение области поиска значительно усложняет проблему. Задача нахождения решений системы линейных диофантовых уравнений (ЛДУ) является NP-полной [8, 11]. Большинство существующих алгоритмов заключаются в приведении исходной системы к однородной, для которой вычисляется конечный базис, после чего общее решение системы получается как линейная комбинация базисных.

M. Filgueiras и A. Tomás в [1] предложили несколько иной подход к проблеме. Они описали метод, по которому любой контекстно-свободной грамматике можно сопоставить некоторую систему ЛДУ, и попытались искать ее решения, используя алгоритмы разбора терминальных цепочек в исходной грамматике.

Нами продолжены их исследования в этой области и получен ряд новых результатов, описанию которых и посвящена статья.

§2. Предварительные определения

Для устранения возможных разногласий и неопределенности дадим основные используемые определения.

Определение 1. ***Системой линейных диофантовых уравнений*** будем называть систему линейных уравнений, коэффициенты которой есть целые числа, а компонентами векторов-решений выступают неотрицательные целые числа ($\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

Определение 2. ***Формальной контекстно-свободной грамматикой*** называется четверка $G = (N, \Sigma, P, S)$, где N — конечное непустое множество (нетерминальный алфавит), элементы которого будем называть *нетерминальными символами (нетерминалами)*; Σ — конечное непустое множество (терминальный алфавит), элементы которого будем называть *терминальными символами (терминалами)*; P — конечное множество пар вида (A, α), где A — нетерминал, а α — цепочка из нетерминалов и терминалов, элементы из P будем называть *правилами* и записывать в виде $A \to \alpha$; S — выделенный символ из N, который будем называть *начальным нетерминалом*.

Определение 3. ***Мультимножество*** — это совокупность элементов, в которой один и тот же элемент может встречаться более одного раза. Равенство мультимножеств, операции их объединения, пересечения и разности определяются точно так же, как и в случае обычных множеств за тем исключением, что необходимо учитывать число вхождений каждого элемента в каждое мультимножество.

Определение 4. ***Элементарное дерево*** — это дерево, соответствующее некоторому правилу $p \in P$ фиксированной грамматики $G = (N, \Sigma, P, S)$. То есть для правила $p = (A \to \alpha)$ корень дерева помечен нетерминалом A, а его потомками являются листья, помеченные символами цепочки α в соответствующем порядке.

Определение 5. ***Цикл*** — это вывод вида $A \Rightarrow^{+} \alpha A \beta$ в грамматике G, где A — некоторый нетерминал. Если при этом $\alpha\beta$ — пустая цепочка, то цикл назовем чистым. Соответствующее циклу дерево будем именовать циклическим (соответственно, чисто циклическим).

В этих определениях мы в основном следуем [12], где можно более подробно ознакомиться с применяемым здесь аппаратом теории формальных языков (язык, нетерминал, терминал, дерево, лес, крона, вывод, цепочка, алфавит, лист).

Следуя [1], введем операцию над элементарными деревьями, использование которой позволяет строить более сложные деревья.

Определение 6. ***Композиция*** — это операция построения по двум деревьям T_1 и T_2 нового дерева T (обозначается как $T = T_1 \odot T_2$), при которой некоторый лист из T_1 заменяется на все дерево T_2. При этом соответствующий лист из T_1 и корень T_2 должны быть помечены одним и тем же нетерминалом.

Определение 7. ***Деревом вывода (разбора)*** назовем дерево, полученное из элементарных путем конечного (возможно, нулевого) числа композиций.

Введем также обратную для композиции операцию, которая позволяет переходить от сложных деревьев вывода к более простым.

Определение 8. ***Декомпозиция*** — операция $T \xrightarrow{\odot^{-1}} \{T_1, T_2\}$, где получаемые деревья удовлетворяют равенству $T_1 \odot T_2 = T$.

Операции композиции и декомпозиции можно применять и к лесам, если воспользоваться следующими определениями:

Определение 9. ***Композицией леса*** F' называется лес F, определяемый формулой

$$F' \xrightarrow{\odot} F = (F' \setminus \{T_1, T_2\}) \cup \{T_1 \odot T_2\} \ ,$$

где T_1 и T_2 — некоторые деревья из F', допускающие композицию.

Определение 10. ***Декомпозицией леса*** F' называется лес F, определяемый формулой

$$F' \xrightarrow{\odot^{-1}} F = (F' \setminus \{T\}) \cup \{T_1, T_2\} \ ,$$

где T — некоторое дерево из F', допускающее декомпозицию на деревья T_1 и T_2.

Введем также несколько новых определений, необходимых в дальнейшем для более простого оформления полученных результатов.

Определение 11. ***Деупорядочение*** — это операция над цепочкой, в результате которой получается мультимножество, состоящее из символов этой цепочки, причем каждый символ в нем встречается ровно столько раз, сколько раз он был в цепочке. Это мультимножество будем обозначать $\{\alpha\}^{\circ}$, где α — произвольная цепочка.

Определение 12. ***Эквивалентность по составу:*** две цепочки α и β называются эквивалентными по составу, если $\{\alpha\}^{\circ} = \{\beta\}^{\circ}$.

§3. Система ЛДУ, ассоциированная с грамматикой

3.1. Балансовые соотношения

Пусть есть некоторая КС-грамматика $G = (N, \Sigma, P, S)$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{\xi}$ размерности n, где n — число правил в грамматике[1], а компоненты вектора принадлежат множеству $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и интерпретируются как количество применений соответствующего правила грамматики в выводе некоторой цепочки, если такой вывод возможен. По вектору $\vec{\xi}$ легко построить лес F_{ξ}, содержащий все элементарные деревья для грамматики G, причем число появлений каждого из них в этом лесе равно значению соответствующей компоненты вектора $\vec{\xi}$.

Определение 13. ***Равновесием нетерминала*** *A для грамматики G в целочисленной неотрицательной точке $\vec{\xi}$ назовем величину*

$$\Delta G_A(\vec{\xi}) = \sum_{i \in H_A} \xi_i - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_{Ak} \xi_k \ , \tag{1}$$

[1] $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

где H_A — множество номеров правил грамматики, левая часть которых совпадает с A, а c_{Ak} — число появлений A в правой части правила P_k.

Положим $\Delta G(\vec{\xi}) = \left(\Delta G_A(\vec{\xi})\right)_{A\in N}$ и назовем этот вектор *равновесием грамматики G в точке $\vec{\xi}$.*

Легко заметить, что сумма $\sum\limits_{i\in H_A} \xi_i$ определяет число появлений A среди корней леса F_ξ, а $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} c_{Ak}\xi_k$ — число появлений того же нетерминала в кроне этого леса. Следовательно, равновесие определяет разность между появлениями A среди корней и в кроне леса. Таким образом, понятие равновесия получает естественную интерпретацию на основе леса F_ξ, а поэтому обозначим $\Delta F_A = \Delta G_A(\vec{\xi})$ и $\Delta F = \Delta G(\vec{\xi})$.

Нами установлены следующие свойства равновесия:

Свойство 1 (инвариантность относительно $\odot$). *Пусть F' — некоторый лес, допускающий композицию*

$$F' \xrightarrow{\odot} F = (F' \setminus \{T_1, T_2\}) \cup \{T_1 \odot T_2\} \ .$$

Тогда $\Delta F' = \Delta F$.

Свойство 2 (инвариантность относительно $\odot^{-1}$). *Пусть F' — некоторый лес, допускающий декомпозицию*

$$F' \xrightarrow{\odot^{-1}} F = (F' \setminus \{T\}) \cup \{T_1, T_2\} \ .$$

Тогда $\Delta F' = \Delta F$.

Свойство 3 (равновесие объединения). *Пусть даны произвольные леса F_1, F_2 и $F = F_1 \cup F_2$. Тогда $\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2$.*

Свойство 4 (равновесие разности). *Если $F_1 \subseteq F$ и $F_2 = F \setminus F_1$ (или, иначе, $F = F_1 \cup F_2$), то тогда $\Delta F_2 = \Delta F - \Delta F_1$.*

Для доказательства этих свойств нужно определить число появлений каждого из нетерминалов в кроне лесов, фигурирующих в левых и правых частях доказываемых равенств, и убедиться, что эти величины равны между собой. Аналогичные вычисления надо выполнить и для числа вхождений каждого нетерминала в корни этих же лесов.

Понятие равновесия впервые вводится нами в этой работе. Оно обобщает понятие "уравновешенности", применяемое в [1], и делает

более простыми дальнейшие выкладки. Приведенные выше свойства будут нужны при доказательстве результатов, излагаемых ниже, однако они имеют и самостоятельное значение, поскольку некоторым образом характеризуют леса деревьев вывода.

3.2. Построение системы ЛДУ

Пусть цепочка x принадлежит языку $L[G]$ грамматики G. Зная некоторый вывод этой цепочки, легко получить вектор $\vec{\xi}$, компоненты которого равны числу применений соответствующих правил при выводе x. Тогда лес F_ξ путем многократной композиции составляющих его деревьев может быть преобразован к дереву разбора T_x для цепочки x. Но в силу свойства 1 равновесие при этом не изменится, а для T_x оно вычисляется весьма просто:

$$\Delta G(\vec{\xi}) = \Delta T_x = \vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T \ , \tag{2}$$

ибо дерево разбора в качестве корня имеет начальный символ грамматики S, а его крона содержит лишь терминалы.

Учитывая (1), приходим к следующим уравнениям:

$$\sum_{i\in H_S} \xi_i - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_{Sk}\xi_k = 1 \ , \tag{3}$$

$$\sum_{i\in H_A} \xi_i - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_{Ak}\xi_k = 0 \ , \ \ \forall A \in N \setminus \{S\} \ , \tag{4}$$

где S — начальный нетерминал грамматики G, H_A — множество номеров тех правил грамматики, в левой части которых находится нетерминал A (формально $H_A = \{i \mid p_i = (A \to \alpha), p_i \in P\}$), а c_{Ak} — число вхождений нетерминала A в правую часть правила p_k.

Уравнение (3) определяется только для начального нетерминала грамматики, система уравнений (4) содержит ровно по одному уравнению для каждого нетерминала грамматики, отличного от начального. Вид правых частей в (3)–(4) объясняется уравнением (2).

Эти уравнения определяют некоторый *баланс*, которому должен удовлетворять любой вывод терминальной цепочки. Они касаются лишь нетерминалов грамматики, но не затрагивают терминалов, т. е. определяют глобальное свойство всех возможных выводов любых цепочек из $L[G]$, но не конкретизируют определенный вывод зафиксированной цепочки x. Для того, чтобы учесть это, необходимо добавить еще уравнения, соответствующие терминалам:

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} c_{ak}\xi_k = b_a \ , \ \ \forall a \in \Sigma \ , \tag{5}$$

где c_{ak} — количество появлений терминала a в правой части правила p_k, а b_a — число вхождений a в цепочку x. Это уравнение также имеет простую интерпретацию, если использовать лес F_ξ: левая часть уравнения в точности равна числу появлений a в кроне этого леса, а терминальная крона леса обязана совпадать с выводимой цепочкой.

Теперь будем считать ξ_i переменными, принимающими значения из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Тогда (3), (4) и (5) определяют систему ЛДУ относительно вектора $\vec{\xi}$. Впервые эта система была получена из менее общих соображений в работе M. Filgueiras и A. Tomás [1], которые сразу брали вывод некоторой терминальной цепочки и для него получали соотношения (3)–(5). Введенное нами понятие равновесия позволяет вводить уравнения не только со специальной правой частью, как в (2), но и рассматривать более общие случаи.

Итак, по произвольной КС-грамматике можно построить систему ЛДУ. Будем далее обозначать ее как $D(G, x)$.

3.3. Уравновешенные леса

M. Filgueiras и A. Tomás также ввели понятие *уравновешенного леса*, под которым понимается лес F, удовлетворяющий равенству $\Delta F = \vec{\mathbb{O}}$, и доказали одно замечательное свойство для таких лесов:

Теорема 1 (M. Filgueiras и A. Tomás [1]). *Любой уравновешенный лес F для грамматики G либо уже есть, либо может быть преобразован (с помощью композиции его деревьев) к уравновешенному лесу, состоящему только из циклических деревьев.*

Этот новый лес будет уравновешенным в силу инвариантности равновесия относительно композиции.

Из этой теоремы нами получено следствие:

Следствие 1.1. *Пусть F^0 есть уравновешенный лес, терминальная крона которого пуста. Тогда он может быть преобразован (с помощью композиции его деревьев) к лесу F^0_c, который является уравновешенным лесом чисто циклических деревьев.*

Доказательство. Согласно теореме 1, можно осуществить преобразование $F^0 \xrightarrow{\odot} F^0_c$, где F^0_c — уравновешенный лес циклических деревьев. Деревья, его составляющие, могут быть только чисто циклическими, ибо иначе крона хотя бы одного из них содержит терминал, но по условию крона исходного леса полностью лишена терминалов, а при композиции они извне не появляются. □

Кроме того, сформулируем и докажем одно интересное свойство уравновешенных лесов циклических деревьев.

Теорема 2. *Пусть F_c — уравновешенный лес циклических деревьев. Тогда любое дерево T из F в своей кроне содержит только один нетерминал, который совпадает с корнем этого дерева.*

Доказательство. Ясно, что в кроне циклического дерева должен быть нетерминал, совпадающий с корнем, в силу определения цикла. Если бы крона содержала еще один нетерминал, то, поскольку F уравновешен, в нем должно быть еще одно дерево, корень которого совпадает с этим нетерминалом (уравновешивает его), но, в свою очередь, этому корню опять соответствует нетерминал уже в кроне нового дерева. А значит, всегда будет оставаться один нетерминал, который “не имеет себе пары”. А это означает, что лес не уравновешен. □

Из этой теоремы можно получить еще одно свойство.

Следствие 2.1. *Если уравновешенный лес циклических деревьев F представлен произвольным образом в виде: $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_m$, тогда каждый лес F_i из этого объединения также является уравновешенным лесом циклических деревьев.*

3.4. Выводимые цепочки и решения ассоциированной системы

Из построения следует, что любому правильному выводу терминальной цепочки x соответствует некоторое решение $D(G, x)$. Однако обратное утверждение неверно. Относительно произвольного решения этой системы возможны ситуации:

1) Это решение порождается некоторым выводом цепочки x.
2) Решение соответствует выводу цепочки $x' \neq x$.
3) Решение не соответствует никакому выводу.

“Неудачными” здесь являются последние два случая. Первый из них возникает из-за того, что величина $\vec{\xi}$ не содержит информации о порядке применения правил при выводе. Причину, приводящую к такой ситуации, поясняет следующая, установленная нами, теорема:

Теорема 3 (о выводимых цепочках). *Если некоторое произвольное решение $\vec{\xi}$ системы $D(G,x)$ соответствует выводу некоторой цепочки x', то цепочки x и x' эквивалентны по составу.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть уравнения для терминалов (5). Поскольку эти уравнения удовлетворяются и для цепочки x, и для x', то отсюда сразу следует, что они должны содержать каждый терминал одно и то же число раз. □

Из теоремы можно получить следствие:

Следствие 3.1 (совпадение систем, ассоциированных с G). *Если цепочки x и x' эквивалентны по составу, то тогда системы $D(G,x)$ и $D(G,x')$ совпадают.*

Приведенные нами теорема и следствие полностью решают проблему, которая вызывается наличием других, отличных от исходной, выводимых терминальных цепочек, также соответствующих решению системы. Даже если такие цепочки есть, то они совпадают с исходной с точностью до порядка составляющих ее терминалов.

Последняя же ситуация из вышеперечисленных несколько сложнее и вызывается наличием в грамматике циклов: решение соответствует выводу некоторой цепочки плюс какое-то количество циклов.

§4. Решение ассоциированной системы

4.1. Общий вид решения системы $\mathbf{D(G,x)}$

Допустим, что вектор $\vec{\xi}$ является некоторым решением системы $D(G,x)$. Этот вектор определяет, сколько раз должно быть задействовано каждое правило грамматики G.

Определение 14. ***Лесом решения*** назовем лес $F = F_{\xi}$, состоящий из элементарных деревьев грамматики G, количество которых определяется компонентами вектора $\vec{\xi}$.

Как было замечено в [1], этот лес является "почти" уравновешенным, что поясняется следующей теоремой:

Теорема 4 (M. Filgueiras и A. Tomás [1]). *Для любого нетерминала $A \in N\backslash\{S\}$ число появлений нетерминала A среди корней леса решения F равно числу его появлений в кроне леса. Начальный нетерминал S имеет ровно на одно появление больше среди корней, чем в кроне:*

$$\Delta F = \vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T \ . \tag{6}$$

Доказательство очевидно, если учесть вид правых частей уравнений (3)–(4) и интерпретацию равновесия на основе леса.

На основе этой теоремы мы установили справедливость следующего следствия:

Следствие 4.1 (лес решения и дерево с корнем S). *Любой лес решений обязательно содержит дерево с корнем, помеченным начальным символом S.*

Доказательство. В самом деле, если крона леса решения не содержит S, то среди корней согласно (6) должно быть ровно одно появление S — ровно одно такое дерево есть в лесе. В общем случае, если крона содержит m вхождений S, то среди корней должно быть $m+1$ вхождение, чтобы удовлетворить (6). Отсюда в лесе решения есть ровно $m+1$ дерево с корнем S. □

Разумно попытаться осуществить преобразование леса решения так, чтобы привести его к некоторой удобной для анализа форме, причем преобразования должны сохранять уравновешенность. Некоторые из таких попыток демонстрируются следующими леммами:

Лемма 1. *Из любого леса решений F_0 можно получить (с помощью конечного числа композиций его деревьев) лес F, представимый в виде $F = \{T_y\} \cup F_e$, где T_y — дерево разбора некоторой терминальной цепочки y, а F_e — уравновешенный лес.*

Доказательство основано на следствии 4.1. Строится последовательность лесов $F_0, F_1, \ldots, F_k$, в которой лес F_{i+1} получен из F_i путем декомпозиции дерева с корнем S и деревом, корень которого помечен нетерминалом из кроны первого дерева. В лесе F_k дерево с корнем S не содержит в кроне нетерминалов.

Лемма 2. *Из любого леса решений F_0 можно получить (с помощью конечного числа композиций) лес F, представимый в виде $F = \{T_y\} \cup F$, где T_y — дерево разбора некоторой терминальной цепочки y, а F_c — уравновешенный лес циклических деревьев.*

Доказательство. Эта лемма следует из предыдущей и теоремы 3, которая утверждает, что уравновешенный лес F_e может быть преобразован композицией к циклическому лесу F_c. □

Ясно, что здесь $\{y\}^\circ \subseteq \{x\}^\circ$, а не попавшие в y символы из x составляют терминальную крону F_e и F_c.

Справедливость этих лемм установлена M. Filgueiras и A. Tomás в [1]. На основе этого результата они смогли определить специальный класс контекстно-свободных грамматик, которые назвали *связными*. Суть их сводится к тому, что они обладают теми приятными свойствами, которые позволяют получить преобразование исходного леса решения к лесу $F = \{T_y\}$, т. е. циклическая часть F становится пустой, а цепочка y, один из разборов которой определяет дерево разбора T_y, эквивалентна x по теореме 3. Таким образом, поиск всех решений системы $D(G,x)$, где G — связная грамматика, сводится к исследованию разборов всех эквивалентных x цепочек. К сожалению, ограничения, которые при этом налагаются на КС-грамматику, слишком тяжелы, например, не все регулярные грамматики являются связными (хотя есть связные грамматики, которые не являются регулярными).

Мы же решили здесь не останавливаться и осуществить дальнейшее преобразование леса решения:

Лемма 3. *Из любого леса решений F_0 можно получить (с помощью конечного числа композиций его деревьев) лес F, представимый в виде $F = \{T_y\} \cup F_c^0 \cup F_c^1$, где T_y — дерево разбора некоторой терминальной цепочки y, F_c^0 — уравновешенный лес чисто циклических деревьев, а F_c^1 — уравновешенный лес циклических деревьев, не являющихся чисто циклическими.*

Доказательство. Согласно лемме 2 лес F_0 может быть преобразован к лесу $F = \{T_y\} \cup F$. Разделяя F_c на две части, одна из которых F_c^0 содержит только чисто циклические деревья, а другая F_c^1 — оставшиеся циклические деревья, и воспользовавшись следствием 2.1, получаем утверждение леммы. □

Последняя лемма позволяет доказать основной результат нашей работы.

Теорема 5 (общий вид решения системы $\mathbf{D(G,x)}$). *Целочисленный неотрицательный вектор $\vec{\xi}$ является решением ассоциированной системы $D(G,x)$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде:*

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_y + \vec{\xi}^0 + \vec{\xi}_c^1 \ , \tag{7}$$

где

1) y — цепочка, выводимая в G, одним из деревьев разбора для которой является T_y;

2) $\{y\}^\circ \subseteq \{x\}^\circ$ (т. е. y состоит только из символов, имеющихся в цепочке x);

3) $\vec{\xi}_y$ — вектор, определяемый деревом T_y;

4) $\vec{\xi}_c^0$ — вектор, определяемый уравновешенным лесом чисто циклических деревьев F_c^0;

5) $\vec{\xi}_c^1$ — вектор, определяемый уравновешенным лесом циклических деревьев F_c^1, таким, что его терминальная крона совпадает с той частью цепочки x, которую не “взяла на себя” цепочка y.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\vec{\xi}$ — произвольное решение системы $D(G,x)$. Тогда соответствующий лес решений F_ξ можно преобразовать к виду $F = \{T_y\} \cup F_c^0 \cup F_c^1$, согласно лемме 3. Поскольку при этом преобразовании ни одно из элементарных деревьев из F_ξ не было потеряно и не появилось новых, то F_ξ и F состоят из одних и тех же и в одинаковом числе элементарных деревьев (F сводится к F_ξ путем декомпозиции). Это значит, что

$$\vec{\xi} = \xi\left(F_\xi\right) = \xi\left(F\right) \ ,$$

где $\xi\left(F_\xi\right)$ и $\xi\left(F\right)$ — вектора, определяющие число элементарных деревьев, из которых состоит соответствующий лес. Далее

$$\vec{\xi} = \xi\left(F\right) = \xi\left(\{T_y\} \cup F_c^0 \cup F_c^1\right) = \xi\left(\{T_y\}\right) + \xi\left(F_c^0\right) + \xi\left(F_c^1\right) \ .$$

То есть получили искомое разложение решения в виде (7). Легко убедиться, что условия *1)–5)* теоремы также удовлетворяются.

Доказательство достаточности. Пусть $\vec{\xi}$ имеет вид (7) и выполнены условия *1)–5)*. Поскольку T_y, F_c^0 и F_c^1 нам даны по условию, то образуем лес $F = \{T_y\} \cup F_c^0 \cup F_c^1$. Путем декомпозиции этого леса можно получить лес F_ξ. Поскольку равновесие инвариантно относительно декомпозиции и объединения, то $\Delta F_\xi = \Delta F$, но в силу того, что леса F_c^0 и F_c^1 являются уравновешенными, а T_y — дерево разбора терминальной цепочки, получаем равенство $\Delta F_\xi = (1,0,0,\ldots,0)^T$. А это означает, что $\vec{\xi}$ удовлетворяет уравнениям для нетерминалов (3)–(4) системы $D(G,x)$. Учитывая условия *2)* и *5)*, получаем, что уравнения для терминалов (5) также выполняются для вектора $\vec{\xi}$. Таким образом, доказано, что ξ — решение $D(G,x)$. □

Замечания

1) Ясно, что всегда можно добиться (декомпозицией), чтобы лес F_c^0 состоял только из простых чисто циклических деревьев, то есть деревьев, соответствующих выводу $A \Rightarrow^+ A$, который не может быть разложен на 2 или более чистых циклов с тем же самым нетерминалом в основе: $A \Rightarrow^+ A \Rightarrow^+ A$.
2) Если $\vec{\xi} = \vec{\xi}_y + \vec{\xi}_c^0 + \vec{\xi}_c^1$ есть решение системы $D(G,x)$ и существует чисто циклическое дерево T в грамматике G с кроной, содержащей только один нетерминал, то, добавляя в лес F_c^0 произвольное число экземпляров этого дерева, опять получаем решение данной системы. Учитывая также и предыдущее замечание, приходим к выводу, что всегда
$$\vec{\xi}_c^0 = \sum_T k_T \xi(\{T\}) ,$$
где суммирование выполняется по всем простым чисто циклическим деревьям грамматики G, крона которых содержит только один нетерминал, а k_T принимают произвольные целые неотрицательные значения.
3) При практическом построении лесов F_c^0 и F_c^1 могут оказаться полезными следствие 1.1 и теорема 2.
4) Если имеем две различные тройки: $\left(T_{y_1}, F_{c_1}^0, F_{c_1}^1\right)$ и $\left(T_{y_2}, F_{c_2}^0, F_{c_2}^1\right)$, то из этого не следует, что соответствующие этим тройкам решения $\vec{\xi}^1$ и $\vec{\xi}^2$ будут также различны.

4.2. Алгоритм решения системы $\mathbf{D(G,x)}$

На основе полученной теоремы легко конструируется простейший, весьма грубый алгоритм решения системы $D(G,x)$:

- Перебираем все мультимножества $Y \subseteq \{x\}^\circ$.
  - Перебираем все пары (T_y, F_c^1) такие, что $\{y\}^\circ = Y$, T_y — дерево разбора для цепочки y в грамматике G, а лес F_c^1 есть уравновешенный лес циклических деревьев, не содержащий чисто циклических элементов, терминальная крона которого равна мультимножеству $\{x\}^\circ \setminus Y$.
  - Получаем для каждой такой пары частное решение системы:
$$\vec{\xi}_ч^i = \xi(T_y) + \xi\left(F_c^1\right) = \vec{\xi}_y + \vec{\xi}_c^1 .$$
При этом учитываем лишь те $\vec{\xi}^i$, которые не встречались ранее.

- Находим все простые чисто циклические деревья и образуем из них лес F_c^0.
- Получаем общее решение
$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_ч^i + \sum_{T \in F_c^0} k_T \xi(T) , \quad k_T \in \mathbb{N} \cup \{0\} , \quad i \in I .$$

Ясно, что алгоритм является переборным. Значительно снижает его эффективность необходимость многократного построения деревьев разбора для различных цепочек y, а также соответствующих лесов циклических деревьев. Кроме того, время работы алгоритма существенным образом зависит от величины каждой из компонент решений, ибо при поиске решения каждое правило исследуется на возможность очередного его применения в выводе некоторой цепочки. Если найдено такое правило, то соответствующая компонента решения увеличивается ровно на единицу. Тем не менее важным достоинством этого алгоритма является то, что он дает явное выражение для общего решения системы, причем это решение может иметь параметрический вид (за счет чистых циклов в грамматике), где параметры пробегают весь натуральный ряд и ноль.

4.3. Вопросы разрешимости системы ЛДУ

Опираясь на теорему об общем решении системы $D(G,x)$ и основываясь на частных свойствах некоторых классов грамматик G и цепочек x, можно изучать вопросы разрешимости $D(G,x)$. В качестве примера приведем несколько полученных нами утверждений:

Утверждение 1. *Система $D(G,x)$ разрешима тогда и только тогда, когда существует цепочка y такая, что $\{y\}^\circ \subseteq \{x\}^\circ$ и существует лес циклических деревьев F_c (возможно, пустой), терминальная крона которого в точности совпадает с $\Theta = \{x\}^\circ \setminus \{y\}^\circ$.*

Утверждение 2. *Разрешимая система $D(G,x)$ имеет бесконечное число решений тогда и только тогда, когда грамматика G содержит чистые циклы.*

Утверждение 3. *Число решений совместной системы $D(G,x)$ конечно, если и только если G не содержит чистых циклов.*

Утверждение 4. *Пусть $L(G)$ есть язык грамматики G. Тогда если $L(G)$ не содержит ни одной цепочки y такой, что $\{y\}^\circ \subseteq \{x\}^\circ$, то система $D(G, x)$ несовместна.*

Утверждение 5. *Если G не содержит циклов, то любому решению системы $D(G, x)$ соответствует некоторый вывод цепочки y, где y эквивалентна исходной цепочке x.*

Утверждение 6. *Если $L(G) = \varnothing$, то $D(G, x)$ несовместна для любой цепочки $x \in \Sigma^*$.*

Доказательство их полностью основывается на представлении любого решения системы ЛДУ (3)–(5) в виде (7). При этом учитывается, что лес $\{T_y\}$ ответственен за выводимые цепочки, определяющие решения, поскольку он состоит из одного дерева вывода, крона которого и образует выводимую цепочку. От того, будет ли чисто циклическая часть F_c^0 пустой или нет, зависит, будет ли иметь система ЛДУ конечное или бесконечное число решений.

Заключение

Перечислим новые результаты, полученные нами и приведенные в данной работе.

1) Построение ассоциированной с грамматикой системы ЛДУ на основе понятия равновесия (баланса) грамматики. Этот метод является более общим, нежели в [1].
2) Исследована ситуация, когда решение ассоциированной системы соответствует выводу некоторой цепочки.
3) Получен общий вид решения ассоциированной системы.
4) Предложен алгоритм решения ассоциированной системы.
5) Затронуты некоторые вопросы относительно разрешимости ассоциированной системы, включая условия разрешимости, совместности, существования конечного или бесконечного числа решений.

Основным результатом работы является получение формулы, описывающей все решения системы $D(G, x)$, то есть системы линейных диофантовых уравнений, ассоциированной с КС-грамматикой. Несмотря на сложность ее практического применения в случае больших размерностей, она может оказаться весьма полезной для теоретических

исследований. Подобная ситуация встречается в математике не впервые. В качестве примера приведем задачу решения линейных систем в вещественном и комплексном случаях. Известные формулы Крамера полностью описывают решение системы (если оно существует и единственно), но если система достаточно велика, то эти формулы уже сложны для вычислений. Однако в теории они играют весьма заметную роль.

Литература

1. *Filgueiras M., Tomás A.* Solving Linear Constraints on Finite Domains through Parsing // Proc. of EPTA'91, 1991.
2. *Башмакова И. Г.* История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М.: Наука, 1984.
3. *Воронин С. М.* Диофантовы уравнения. Математическая Энциклопедия. Т. 2. М.: Энциклопедия, 1979.
4. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
5. *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах. М.: Наука, 1983.
6. *Проскуряков И. В.* Линейное уравнение. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Энциклопедия, 1982.
7. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций. М.: Мир, 1977.
8. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1, 2. М.: Мир, 1991.
9. *Comon H., Dincbas M.* A Methodological View of Constraint Solving, 1995. (`ftp://ftp.lri.fr/LRI/articles/comon/casm.ps.Z`)
10. *Ajili F., Contejean E.* Avoiding Slack Variables in the Solving of Linear Diophantine Equations and Inequations // Technical Report. 1996. (`ftp://ftp.lri.fr/LRI/articles/contejean/tcs97.ps.gz`).
11. *Tomas A., Filgueiras M.* A New Method for Solving Linear Constraints on the Natural Numbers // Proc. of EPTA'91, 1991.
12. *Ахо А., Ульман Дж.* Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. Т. 1, 2. М.: Мир, 1978.